

חידון 2 ב



תוכן העניינים

1.	אינטגרלים כפולים	1
2.	שימושי האינטגרל הכפול	7
3.	אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)	10
4.	החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)	15
5.	אינטגרלים משולשים ושימושיהם	17
6.	אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות	20
7.	החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)	24
8.	אינטגרלים קוויים ושימושיהם	25
9.	שדות משמרים - אי תלות במסלול	30
10.	משפט גרין	35
11.	אינטגרלים משטחיים ושימושיהם	38
12.	משפט הדיברגנץ (גאוס)	41
13.	משפט סטוקס (גרין במרחב)	43

חדוא 2 ב

פרק 1 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים 1
2. החלפת סדר אינטגרציה 4
3. כללי 3 (ללא ספר)

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-3 :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr \quad (3)$$

באינטגרל $\iint_D f(x,y) dx dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(1,1), A(1,0), O(0,0) \quad (4)$$

$$D - \text{משולש בעל הקודקודים : } B(-2,1), A(2,1), O(0,0) \quad (5)$$

$$D - \text{טרפז בעל הקודקודים : } C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0) \quad (6)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq 1 \quad (7)$$

$$D - \text{עיגול } x^2 + y^2 \leq y \quad (8)$$

$$D = \{ (x,y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (9)$$

$$D = \{ (x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$(11) \iint_D xy^2 dx dy, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x = 1.$$

$$(12) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}}, \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה } (2,2).$$

$$(13) \iint_D |xy| dx dy, \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a, \text{ שמרכזו בראשית.}$$

$$(14) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ כאשר } D \text{ מקבילית בעלת הצלעות } y = 3a, y = a, y = x + a, y = x \text{ (} a > 0 \text{).}$$

$$(15) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA, \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x = -1, y = 0, y = \pi, y = \pi\sqrt{x}.$$

תשובות סופיות

1 (1)

$$\frac{1}{40} \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{3}\pi \quad (3)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ & + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{32}{21} \quad (11)$$

$$8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (12)$$

$$\frac{a^4}{2} \quad (13)$$

$$14a^4 \quad (14)$$

$$0 \quad (15)$$

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6)$$

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז : שנו את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (8)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (7)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (10)$$

$$(x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (9)$$

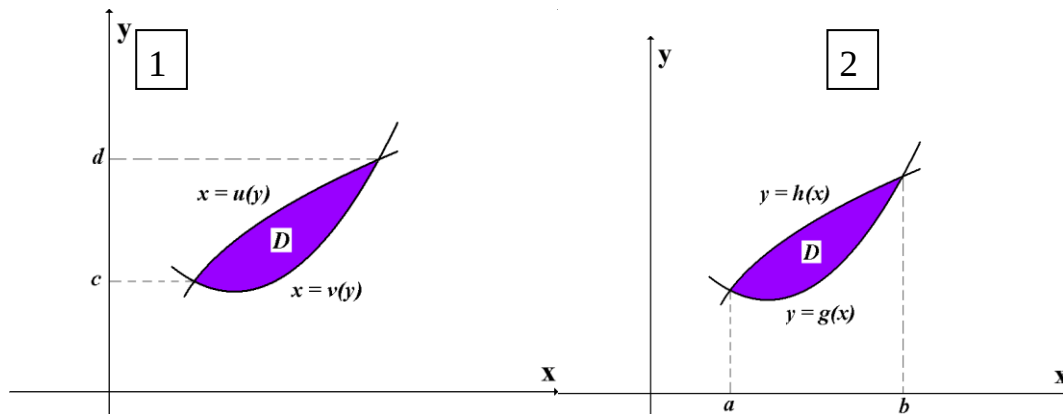
הערות סימון

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך:} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישומים $dx dy$ ו- $dy dx$ זהים.

תשובות סופיות

$$\int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (7)$$

$$\frac{241}{60} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}(e - 2) \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (10)$$

חדוא 2 ב

פרק 2 - שימושי האינטגרל הכפול

תוכן העניינים

1. שימושי האינטגרל הכפול 7

שימושי האינטגרל הכפול

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים:

$$x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2)$$

$$y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4)$$

בשאלות 5-10 חשבו את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים:

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (6)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (8)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (9)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (10)$$

11 ללוח דק בצורת משולש, שקדקודיו הם $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$,

יש פונקציית צפיפות $\delta(x,y) = xy$.

א. חשבו את מסת הלוח.

ב. חשבו את מרכז הכובד של הלוח.

12 ללוח דק בצורת מלבן $R = \left\{ (x,y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \right\}$,

יש פונקציית צפיפות קבועה (הלוח הומוגני).

חשבו את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר ה- z .

בטאו את התשובה באמצעות המסה של הלוח, M .

13 מצאו את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$, הנמצא מעל למלבן

$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$, שבמישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{64}{3}$

(2) $a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right)$

(3) 32

(4) $\frac{64}{3}$

(5) $\frac{5}{6}$

(6) $\frac{88}{105}$

(7) $\frac{17}{6}$

(8) $16\frac{1}{5}$

(9) $\frac{8}{3}$

(10) 36

(11) א. $\frac{1}{24}$ ב. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)$

(12) $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

(13) $\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1)$

חדוא 2 ב

פרק 3 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק 10
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות 12

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3 שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

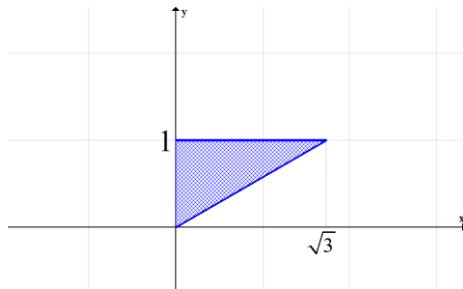
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$

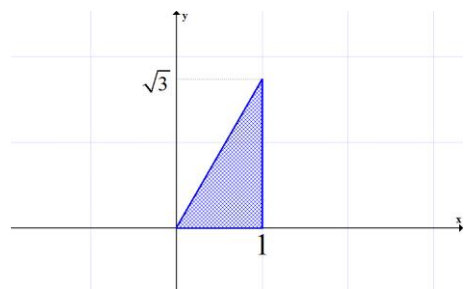
5 הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \\ \text{or} & & \\ \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases} & & \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq 2, \\ 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \end{cases} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \end{array} \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array} \quad (6)$$

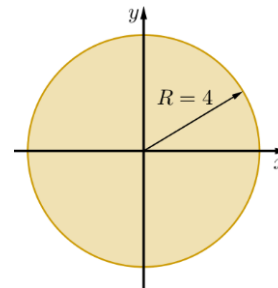
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

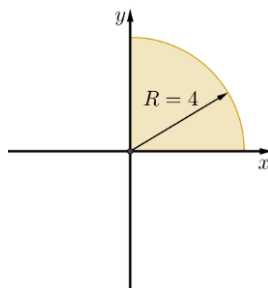
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

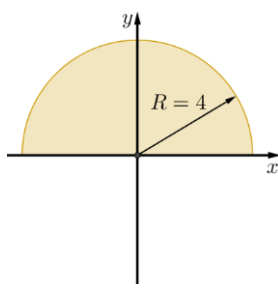
א.



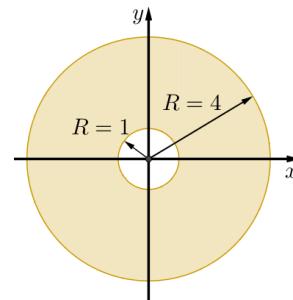
ב.



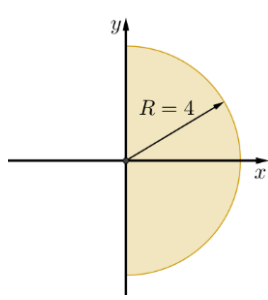
ג.



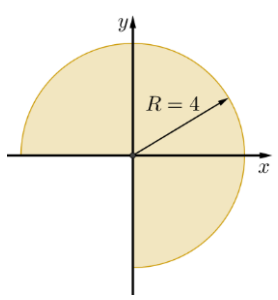
ד.



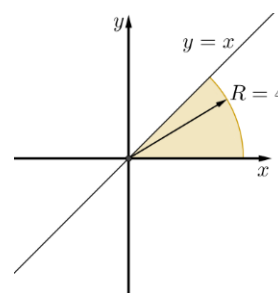
ה.



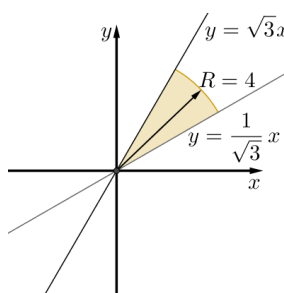
ו.



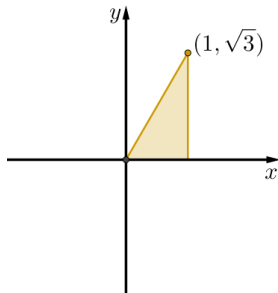
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$
- (3) π (4) $\frac{\pi}{8}$ (5) $\frac{\pi}{2}$
- (6) πa^2 (7) 2π (8) 36 (9) $\frac{4}{3}$
- (10) $\pi \ln \frac{e}{2}$ (11) $\pi(4-\pi)$ (12) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ (13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (14) $\frac{\pi}{2} + 1$ (15) $-\frac{4}{5}$ (16) $\pi \ln \frac{4}{e}$ (17) π
- (18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) $\frac{32}{9}$
- (20) $\frac{5\pi}{32}$
- (21) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

חדוא 2 ב

פרק 4 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרל כפול 15

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$, כאשר $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$.

תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin 2 \quad (3)$$

$$192 \quad (4)$$

$$96\pi \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$e - \frac{1}{e} \quad (7)$$

חדוא 2 ב

פרק 5 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים ושימושיהם..... 17

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-4 :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1 + x + y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 5-8, על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (6)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (7)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (8)$$

בשאלות 9-14 חשבו את נפחי הגופים החסומים על ידי המשטחים:

$$z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0 \quad (9)$$

$$z = 0, z = x^2 + y^2, y = 1, y = x^2 \quad (10)$$

$$(x \geq 0) \quad z = 0, z = x^2 + y, y = 0.5x, y = 2x, y = \frac{2}{x} \quad (11)$$

$$z = 0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (12)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = y \quad (13)$$

$$z = x + y, z = 6, x = 0, y = 0, z = 0 \quad (14)$$

(15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

(16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$, סביב ציר ה- z . בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M .

תשובות סופיות

(1) 1

(2) $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

(3) $\frac{27}{4}$

(4) $\frac{65}{28}$

(5) $2 \sin 4$

(6) $3e - 6$

(7) 4

(8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

(9) $\frac{5}{6}$

(10) $\frac{88}{100}$

(11) $\frac{17}{6}$

(12) $16\frac{1}{5}$

(13) $\frac{8}{3}$

(14) 36

(15) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{2h}{3}\right), M = \frac{1}{2}\pi k h^2 r^2$

(16) $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$

חדוא 2 ב

פרק 6 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות..... 20

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרלים המשולשים:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx \quad (1)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx \quad (2)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx \quad (4)$$

(5) גוף כלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ מלמעלה. חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

(6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמטה.

(7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ומלמטה על ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

(8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy , החסום על ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והגליל $x^2 + y^2 = a^2$.

(9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z = x^2 + y^2$ ובין $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 2$ ומלמטה על ידי $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. פתרו בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11 חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z = 1$ ומלמטה על ידי $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. פתרו בשתי דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12 חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0, 0, 1)$ ורדיוסו 1. א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות. ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13 הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ומחוץ לגליל $x^2 + y^2 = 1$. בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14 חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:

- א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
- ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
- ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15 ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^{2-r} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}} r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$V_1 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{0.5} \int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{א.}$$

$$V_2 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{\cos \phi} r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

$$4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{24\pi - 32}{9} \quad (3)$$

$$\frac{32\pi}{5} \quad (4)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107 / 488), V = \frac{122}{3} \pi \quad (5)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2})), V = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{2}) \quad (6)$$

$$\frac{64\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \quad (7)$$

$$\frac{\pi}{2} a^4 \quad (8)$$

$$\frac{5}{6} \pi \quad (9)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (10)$$

$$\frac{5}{3} \pi \quad (11)$$

$$\frac{5}{12} \pi \quad (12)$$

$$V = \int_{x=-2}^2 \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx - \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 dz dy dx \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$V = \int_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1/\sin\phi}^2 r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi \quad \text{ג.} \quad V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 1 r dz dr d\theta$$

$$\frac{7}{6} \pi \quad (14)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (16)$$

חדוא 2 ב

פרק 7 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

1. החלפת משתנים באינטגרלים משולשים 24

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

(1) חשבו את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$. xy=4, \quad xy=2, \quad z=y+1, \quad z=y, \quad x=3, \quad x=1$$

(2) חשבו את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשבו את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשבו את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים:

$$. y=4z^2, \quad y=z^2, \quad y=4x-12, \quad y=4x, \quad y=2z, \quad y=z$$

(5) חשבו את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$, כאשר G הוא כדור

שמרכזו בנקודה $(1, 2, 4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

חדוא 2 ב

פרק 8 - אינטגרלים קווים ושימושים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים קווים ושימושים 25
2. נספח - הצגה פרמטרית של עקומים חשובים 29

אינטגרלים קוויים ושימושיהם

* מומלץ בחום לעיין בנספח 'הצגה פרמטרית של עקומים חשובים'.

שאלות

אינטגרל קווי מסוג I

בשאלות 1-4 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi ; f(x, y) = 1 - x^2 \quad (1)$$

$$C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y) = x \quad (2)$$

$$C: \text{קטע של ישר המחבר את } O(0,0) \text{ עם } A(1,2) ; f(x, y) = x + y \quad (3)$$

$$C: \text{היקפו של } \triangle OAB : O(0,0), A(0,1), B(1,0) ; f(x, y) = x + y^2 \quad (4)$$

בשאלות 5-6 חשבו את האינטגרל $\int_C f(x, y, z) ds$, כאשר:

$$C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

$$C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} t^2, z = \frac{1}{3} t^3, 0 \leq t \leq 3 ; f(x, y, z) = x^3 + 3z \quad (6)$$

$$(7) \text{ חשבו את אורך העקום } x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$(8) \text{ סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי } x = \cos t, y = \sin t, z = 2t \text{ (} 0 \leq t \leq \pi \text{)} \\ \text{חשבו את מסת הסליל, אם פונקציית הצפיפות היא } \delta(x, y, z) = kz \text{ (} k > 0 \text{).}$$

אינטגרל קווי מסוג II

בשאלות 9-10 חשבו :

$$C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \quad (9)$$

$$C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy \quad (10)$$

(11) חשבו $\int_C y dx + x^2 dy$, כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$,
ו- C נתון ע"י המשוואה :

א. $y = 2x$

ב. $y = x^2$

(12) חשבו $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y) dx + (y-x) dy$, אם העקום נתון על ידי :

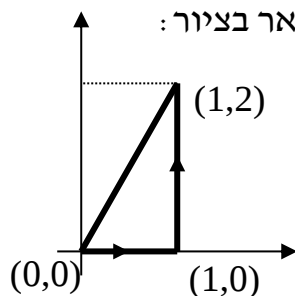
א. הפרבולה $y^2 = x$

ב. קו ישר.

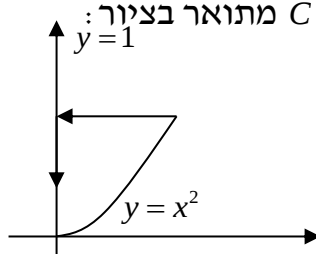
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$.

(13) חשבו $\int_C x^2 y dx + x dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור :



(14) חשבו $\int_C (x - y^2) dx + dy$, כאשר המסלול C מתואר בציור :



$$(15) \text{ אם } \mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$$

חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$, לאורך המסלולים:

$$\text{א. } x=t, y=t^2, z=t^3$$

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

בשאלות 16-17 חשבו את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר:

$$(16) \mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(17) \mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$(18) \text{ נתון שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$$

א. חשבו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$

מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$?

$$(19) \text{ חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח } \mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$)

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

תשובות סופיות

(1) π

(2) $\frac{16}{3}$

(3) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(4) $\frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$

(5) $\sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3})$

(6) $\frac{567}{2}$

(7) 6

(8) $\sqrt{5}k\pi^2$

(9) $\frac{1}{3}$

(10) $\frac{4}{3}$

(11) א. $\frac{28}{3}$ ב. $\frac{32}{3}$

(12) א. $\frac{34}{3}$ ב. 11 ג. 14 ד. $\frac{32}{3}$

(13) $\frac{1}{2}$

(14) $\frac{4}{5}$

(15) א. 2 ב. -3 ג. $\frac{6}{5}$

(16) $-\frac{59}{105}$

(17) $\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$

(18) א. 3 ב. -3

(19) 1

הצגה פרמטרית של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 \ (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) \ (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 \ (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) \ (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' $(1, 2)$ לנק' $(3, 4)$ $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

חדוא 2 ב

פרק 9 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול..... 30

שדות משמרים – אי-תלות במסלול

שאלות

בשאלות 1-6 קבעו האם F הוא שדה משמר; אם כן, מצאו פונקציה ϕ , כך ש- $\nabla\phi = F$.

$$F(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$F(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} \quad (2)$$

$$F(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$F(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k} \quad (4)$$

$$F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$F(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{נתון האינטגרל} \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$$

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \text{חשבו את האינטגרל} \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy$$

$$(9) \quad \text{חשבו את האינטגרל} \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$$

(10) יהי $F(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{מ-} (1, 0) \quad \text{ל-} (-1, 0).$$

11) חשבו את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$ תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$, ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשבו:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{א.} \quad \oint_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ב.} \quad \oint_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ג.}$$

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ברביע הראשון.

ב. בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ נסמן $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום D (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$,

חשבו את $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר C עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה $(0, 0)$.

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכיחו כי $f_y = g_x$ בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) $= 15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$, לאורך C .

(12) א. 2π ב. -2π ג. 0

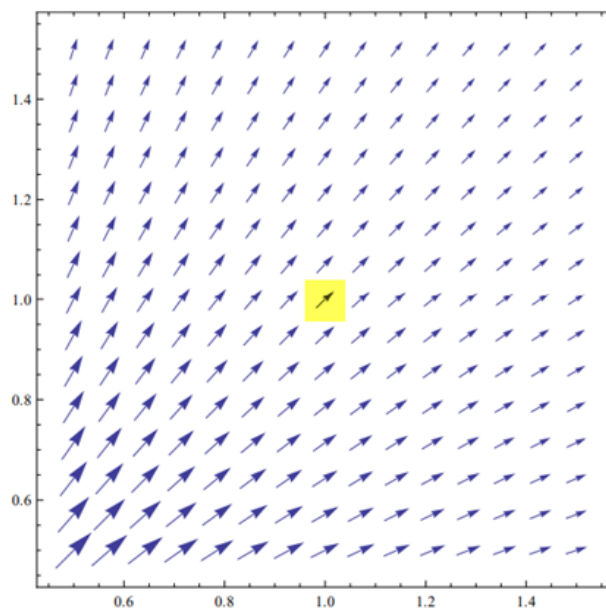
(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה; $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$; ה. 2π

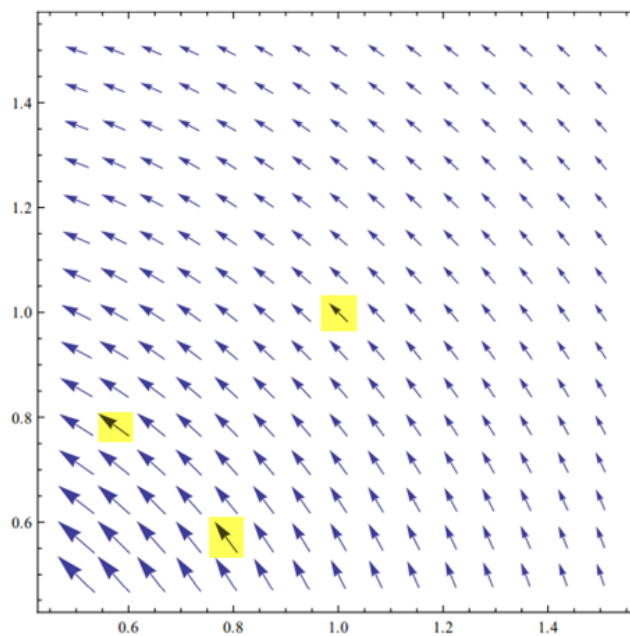
(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:



חדוא 2 ב

פרק 10 - משפט גרין

תוכן העניינים

1. משפט גרין..... 35

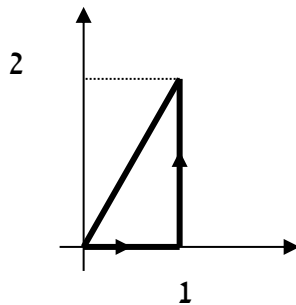
משפט גרין

שאלות

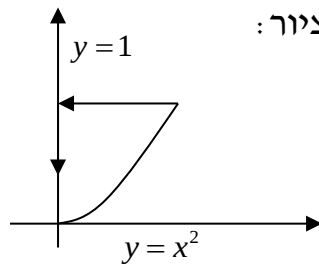
בשאלות 1-3 אשרו את משפט גרין.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$,

והראו שהם שווים זה לזה.



(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור:



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור:

(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$; הוא ריבוע שקדקודיו:

בכיוון החיובי. $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$

(4) חשבו את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x,y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון, ומשלים הקפה אחת.

(5) חשבו את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$, כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשבו את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$,

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה $(-2, 0)$.

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C ,

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

ב. חשבו את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(8) נתון האינטגרל הקווי $\oint_C (x^3 + 3x^2y + 3xy^2y^3) dx + (3x^2y + 3x - \sin y) dy$,

כאשר C מסילה פשוטה סגורה נגד כיוון השעון.

מהו הערך המקסימלי של האינטגרל?

עבור איזו מסילה C הוא מתקבל?

(9) הוכיחו שלא קיימת עקומה פשוטה, סגורה וגזירה למקוטעין C ,

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy = 0$$

(10) חשבו את $\oint_C \frac{4x-y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dx + \frac{x-4y}{4 \cdot (x^2+y^2)} dy$, כאשר:

א. C הוא המעגל $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$.

ב. C הוא המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 144$.

ג. C היא מסילה כלשהי סביב הראשית.

תשובות סופיות

- (1) הערך המשותף הוא 0.5.
- (2) הערך המשותף הוא 0.8.
- (3) הערך המשותף הוא 8.
- (4) 1.5π
- (5) $0.5\sin 64$
- (6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$
- (7) א. הוכחה. ב. πab
- (8) הערך המקסימלי הוא $\frac{6\pi}{4}$, עבור המסילה $C: x^2 + y^2 = 1$.
- (9) הוכחה.
- (10) א. 0 ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{\pi}{2}$

חדוא 2 ב

פרק 11 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

תוכן העניינים

1. אינטגרלים משטחיים מסוג 1	38
2. אינטגרלים משטחיים מסוג 2	40
3. הצגה פרמטרית של משטח (ללא ספר)	

אינטגרלים משטחיים מסוג I

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את האינטגרל המשטחי:

$$(1) \quad \iint_S x^2 y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y,$$

$$\text{מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2].$$

$$(2) \quad \iint_S x dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

$$(3) \quad \iint_S y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3, \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1.$$

$$(4) \quad \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0.$$

$$(5) \quad \iint_S x y z dS, \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$(6) \quad \text{חשבו את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R.$$

$$(7) \quad \text{היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2, \text{ שמתחת למישור } z = 1,$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0, \text{ קבועה.}$$

חשבו את מסת היריעה.

תשובות סופיות

$$171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2)$$

$$\pi\sqrt{2} / 4 \quad (3)$$

$$16\pi \quad (4)$$

$$93 / \sqrt{10} \quad (5)$$

$$4\pi R^2 \quad (6)$$

$$\frac{\pi\delta_0}{6} (5\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

אינטגרל משטחי מסוג II

שאלות

בשאלות הבאות חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

בניסוח אחר: חשבו את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S .

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת על ידי המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת על ידי המישורים $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$.

(5) $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$, S הוא חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

תשובות סופיות

(1) $\frac{11}{6}$

(2) $\frac{8\pi}{3}$

(3) 27

(4) 12π

(5) -16π

חדוא 2 ב

פרק 12 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

תוכן העניינים

1. משפט הדיברגנץ..... 41

משפט הדיברגנץ (גאוס)

שאלות

בשאלות 1-3 אשרו את משפט הדיברגנץ.

כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$,

והראו שהם שווים זה לזה ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).
(ראו הערת סימון בעמוד הבא)

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G ,
הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$, בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.
חשבו את השטף של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S .
כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
 $x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$.

(6) חשבו את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3) dzdx + (2xy + y^2z) dxdy$,
כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).
חשבו את השטף דרך S של השדה הווקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.
כלומר, חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשבו את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$, כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$, שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\text{מתקיים: } \iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy \end{aligned}$$

תשובות סופיות

$$(1) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{11}{6}$$

$$(2) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \text{ הערך המשותף הוא } 27$$

$$(4) 279\pi$$

$$(5) 16$$

$$(6) \frac{2\pi a^5}{5}$$

$$(7) 0$$

$$(8) -4\pi$$

חדוא 2 ב

פרק 13 - משפט סטוקס (גרין במרחב)

תוכן העניינים

1. משפט סטוקס.....43

משפט סטוקס

שאלות

בשאלות 1-3 בדקו שמשפט סטוקס אכן מתקיים.
 כלומר, חשבו את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,
 והראו שהם שווים זה לזה (ראו הערת סימון בעמוד הבא).

$$(1) \quad S: \text{חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2, \text{ שבו } z \geq 0; \mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$$

$$(2) \quad S: \text{הוא שפת חצי כדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור } xy. \mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$$

$$(3) \quad S: \text{הוא משטח התחום בשמינית הראשונה, החסום על ידי המישורים } 2x + z = 6, y = 2, \text{ ושאינו כלול א. במישור } xy. \\ \text{ב. במישור } y = 2. \\ \text{ג. במישור } 2x + z = 6.$$

$$(4) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz, \text{ כאשר } C \text{ עקומה בצורת מלבן מ-}(0,0,0) \text{ ל-}(0,3,3), \text{ משם ל-}(1,3,3) \text{ ומשם ל-}(1,0,0).$$

$$(5) \quad \text{חשבו את האינטגרל } \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ כאשר } \mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}; \\ \text{ו-} C \text{ היא שפת המשולש, שקדקודיו הם } (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \text{ וכיוונה הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה, מהכיוון החיובי של ציר ה-} z).$$

$$(6) \quad \text{חשבו את } \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS, \text{ כאשר } \mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}; \text{ ו-} S \text{ הוא החלק של הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \text{ הכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1, \text{ ומעל למישור } xy.$$

(7) חשבו את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$, כאשר $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$;

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים:}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

תשובות סופיות

(1) הערך המשותף הוא 12π .

(2) הערך המשותף הוא -16π .

(3) הערך המשותף הוא: א. -6 ב. -9 ג. -18

(4) -90

(5) -1

(6) 0

(7) 12π